

1) Najděte všechny řešení:

$$f'(x) \cdot f(x) = x^3$$

1. Označme $g(x) = x$, $h(x) = x^3$, pak

$$I = D_h = \mathbb{R}$$

$$2. \quad \int x \, dx \stackrel{c}{=} \frac{x^2}{2} \quad , \quad \int x^3 \, dx \stackrel{c}{=} \frac{x^4}{4}$$

Dosta' val me rovnost

$$\frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^4}{4} + C$$

3. $G(x) = \frac{x^2}{2}$ je prostá na intervalech

$J_1 = (-\infty, 0)$, $(0, \infty) = J_2$, budeme hledat g s hodnotami
v těchto intervalech.

Nechť g má hodnoty v J_1 . Fixujme $c \in \mathbb{R}$

$G(J_1) = (0, \infty)$, dostáváme podmínku

$$\frac{x^4}{4} + c > 0 \quad \text{i.e.} \quad x^4 > -4c.$$

Pro $C > 0$ je podmínka splnená pre $x \in \mathbb{R}$,

pro $C \leq 0$ je podmínka splnená pre

$$|x| > \sqrt[4]{-4C}.$$

$$\delta = \sqrt{\frac{x^4}{2} + 2C} \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & C > 0 \\ x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4C}), & C \leq 0 \\ x \in (\sqrt[4]{-4C}, +\infty), & C \leq 0 \end{cases}$$

Nechť γ má hodnoty v $\mathbb{J}_2$. $G(\mathbb{J}_2) = (0, \infty)$

i.e. pro dané c jsou podmínky na x

stejně jako u γ

$$\gamma = \sqrt{\frac{x^4}{2} + 2c} \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & c > 0 \\ x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4c}), & c \leq 0 \\ x \in (\sqrt[4]{-4c}, +\infty), & c \leq 0 \end{cases}$$

$$C \leq 0:$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt[4]{-4c}_-} \pm \sqrt{\frac{x^4}{2} + 2c} = 0 = \lim_{x \rightarrow \sqrt[4]{-4c}_+} \pm \sqrt{\frac{x^4}{2} + 2c}$$

Prodloužení řešení by tedy muselo splňovat

$$y(\underbrace{-\sqrt[4]{-4c}}_{x_0}) = 0 \text{ respektive } y(\underbrace{\sqrt[4]{-4c}}_{x_0}) = 0$$

z rovnice dostáváme $x_0^3 = y'(x_0) \cdot y(x_0) = 0$

i.e. $0 = x_0 = \pm \sqrt[4]{-4c}$. Dostáváme $C = 0$.

Pto $c = 0$ jdon lepit fészén.:

$$\text{tgyto} \left\{ \begin{array}{l} \cdot \gamma(x) = \sqrt{\frac{x^4}{2}} = \frac{x^2}{\sqrt{2}}, \quad x \in (-\infty, 0) \\ \cdot \gamma(x) = -\frac{x^2}{\sqrt{2}}, \quad x \in (-\infty, 0) \end{array} \right.$$

$$\text{sténito} \left\{ \begin{array}{l} \gamma(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}}, \quad x \in (0, \infty) \\ \gamma(x) = -\frac{x^2}{\sqrt{2}}, \quad x \in (0, \infty) \end{array} \right.$$

Poslední věta maximální řádu řádku pro $C=0$:

$$\gamma(x) = \sqrt{\frac{x^4}{2} + z_c}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c > 0$$

$$\gamma(x) = -\sqrt{\frac{x^4}{2} + 2c}, \quad c \geq 0$$

$$\bullet \quad \delta(x) \approx \frac{x^2}{\sqrt{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\gamma(x) = -\frac{x^2}{\sqrt{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cdot f(x) = \operatorname{sgn}(x) \frac{x^2}{\sqrt{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cdot f(x) = -\operatorname{sgn}(x) \frac{x^2}{\sqrt{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cdot f(x) = \sqrt{\frac{x^4}{2} + 2c}, \quad x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4c}), \quad c < 0$$

$$\cdot f(x) = -\sqrt{\frac{x^4}{2} + 2c}, \quad x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4c}), \quad c < 0$$

$$\cdot f(x) = \sqrt{\frac{x^4}{2} + 2c}, \quad x \in (\sqrt[4]{-4c}, +\infty), \quad c < 0$$

$$\cdot f(x) = -\sqrt{\frac{x^4}{2} + 2c}, \quad x \in (\sqrt[4]{-4c}, +\infty), \quad c < 0.$$

$$2) \quad y'(x) = \sin(y(x) - x)$$

Buďme, hledat řešení ve tvaru $y(x) = z(x) + x$,
kde z je nějaká vhodná funkce.

To je BÚNO, neboť pro každé řešení y

lze konstruovat vhodnou funkci z
jako $z(x) = y(x) - x$ a D_y .

Čiže máme $z + z$, aby $f(x) \cdot z(x) + x$ se sčítalo
při volbě rovnici, i.e.

$$z'(x) + 1 = \sin(z(x))$$

i.e.

$$z'(x) = \sin(z(x)) - 1$$

—

1. Označme $h(x) = 1$, $g(x) = \sin(x) - 1$,
 $I = D_h = \mathbb{R}$

2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Dostáváme spočetné mnoho stacionárních
řešení $z(x) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

3. $\eta_{ax. int.}$ kde g je spojitá, množina
 jsoer $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2(k+1)\pi\right) = J_k, k \in \mathbb{Z}$

4. Pro z s hodnotami v J_k platí

$$\frac{z'(x)}{\sin(z(x)) - 1} = 1$$

$$\int 1 \, dx = x$$

$$\int \frac{1}{\sin(x) - 1} \, dx = \int \frac{1 + \sin(x)}{\sin^2(x) - 1} =$$

$$= - \int \frac{1 + \sin(x)}{\cos^2(x)} \, dx = - \tan(x) - \frac{1}{\cos(x)} =$$

$$= - \frac{\sin(x) + 1}{\cos(x)} \quad \text{for } \forall x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right),$$

for step it a double period T_k

Platz:

$$- \frac{\sin(x) + 1}{\cos(x)} = \cot\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Positiv

$$\cot\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = x + c$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad G(J_k) &= \cotg \left(\left(\frac{\pi}{4} + k\pi - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + (k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right) \\
 &= \cotg \left((k\pi, (k+1)\pi) \right) = \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

I.e. dostávám pro $\forall c \in \mathbb{R}^2$ podmínku $x \in \mathbb{R}$

Je-1: $\exists$ řešení s hodnotami v J_k , pak

$$\frac{z(x)}{2} - \frac{\pi}{4} = \arccotg(x+c) + k\pi$$

$$z(x) = 2 \arccos(x+c) + 2\sqrt{k} + \frac{g}{2},$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{R}$$

6. Všechna nalezená řešení jsou max.

7. Řešení původní rovnice budou mít

tvu $y(x) = z(x) + x$, kde z jsou
všechna nalezená řešení.

$$3) \quad y' = \frac{x}{y(x)} + \frac{y(x)}{x}$$

Hledám řešení tvaru $y(x) = z(x) \cdot x$. To je

opět BČNO, aleť $D_{RHS} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, i.e.

Budu hledat řešení pro $x \neq 0$ a tedy

že vždy můžeme $z(x) = \frac{y(x)}{x}$.

Dostáváme $z(x) + z'(x) \cdot x = \frac{1}{z(x)} \cdot z(x)$

i.e. $z'(x) = \frac{1}{z(x) \cdot x}$

pro tože hledáme řešení z det. 12-903.